

(1085). D'Amore, B. (2024). Diferencias y similitudes entre teorías de Educación matemática. In: Jorge E. Sagula, *Tendencias en investigación en Educación Matemática*, Actas del Congreso homónimo. Universidad de Luján, Argentina, 16-17 V 2024, pp. 1-2. Panel de apertura.

Diferencias y similitudes entre teorías de Educación matemática

Bruno D'Amore

Doctorado en Educación matemática, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia)
bruno.danore@unibo.it

Palabras clave: Didáctica general y Didácticas disciplinares, teorías en Educación matemática, teorías de Educación matemática

Resumen.

En la primera parte de este texto se relacionan las llamadas Didáctica General y Didáctica Disciplinaria, resaltando similitudes y diferencias. La segunda parte enumera las principales teorías que han sido y (algunas) siguen siendo la base teórica de los estudios de Educación Matemática.

1. Didáctica General y Didácticas Disciplinarias

Para empezar, trataremos los términos de un amplio debate entre las solicitudes específicas de la Didáctica General y las de las Didácticas Disciplinarias, proponiendo una reflexión sobre algunos puntos.

La problemática de la relación entre la Didáctica General y las Didácticas Disciplinarias tiene ya muchos estudios en su haber; sin embargo, aún queda mucho por hacer, en nuestra opinión, para intentar superar una desconfianza recíproca, debida principalmente al siguiente hecho:

los estudiosos de Didáctica General usualmente provienen de estudios de carácter pedagógico;
los estudiosos de cada Didáctica Disciplinar suelen provenir de estudios de carácter disciplinar.

Los expertos de Didáctica General tienen dificultad para entender la increíble articulación de las disciplinas y a veces confunden en una única visión la disciplina, la Didáctica de dicha disciplina, la Epistemología de la disciplina y la Epistemología de la Didáctica de la disciplina.

A los expertos de Didáctica Disciplinar, en cambio, les cuesta entender el sentido mismo de los estudios de los primeros, al estar acostumbrados a producir pruebas lógicas, demostraciones irrefutables, razonamientos basados en axiomas, reglas, deducciones o pruebas empíricas.

Los primeros consideran reunidas en un solo grupo a todas las numerosas y variadas multiplicidad de estudio de los segundos, mientras los segundos no consiguen apreciar la labor analítica y sintética de los primeros, ya que abordan temas demasiado alejados de la práctica específica de los estudiosos de las Didácticas Disciplinarias.

Sin embargo, la propia historia de las disciplinas empuja ahora a trabajar juntos, a ex didactas disciplinarios y ex pedagogos, cada uno en su especificidad: en Didáctica de la disciplina o en Didáctica General.

Por esto, creemos que una reflexión como ésta, destinada a intentar comprender las razones profundas de esta oposición, en un intento de ofrecer una salida a la misma, puede ser una contribución al trabajo común.

De hecho, entre los disciplinaristas, se mira con recelo a quienes se ocupan de la Didáctica de la Disciplina ... ¿Deben seguir considerándose disciplinaristas o han dejado de serlo? ¿No se han convertido, acaso, en pedagogos? Uno de los objetivos de esta breve reflexión es precisamente el de mostrar que la Didáctica de una disciplina debe ser realizada por disciplinaristas, pero expertos de Didáctica; la Didáctica de una disciplina no es ciertamente una de las canónicas de la disciplina, pero entra necesariamente dentro de las posibles tareas de investigación de los disciplinaristas; vemos la Didáctica de la Matemática como un ejemplo de Matemática aplicada, aplicada a los problemas de la educación.

Así, entre los pedagogos, quienes se ocupan de Didáctica parecen ser estudiosos desviados, demasiado cercanos a la práctica heurística, tan poco noble; quienes proceden de la Pedagogía teórica están muy cerca de la Filosofía y, desde luego, no siempre les gusta oír hablar de escuela, clase, currículo, exámenes, porcentajes, ...

En nuestra opinión, conviene aliarse: la guerra por sostener la Didáctica como una de las piedras angulares de la cultura sólo está en sus primeras escaramuzas y será muy larga; vale la pena buscar entonces, si las hay, posibles vías de entendimiento. Tomaremos como área específica de análisis, entre las Didácticas disciplinarias, la de la matemática, el caso que más interesa a nosotros.

En aras de la honestidad, recordemos que para algunos autores no existen ni la Didáctica General ni la Didáctica de la Matemática como disciplinas en sí mismas, y esto es por su carácter demasiado general.

En Cornu y Vergnioux (1992, p. 15) se reporta la opinión de Raymond Barra, director del IREM de Poitiers:

«Yo dudo de la existencia de una “didáctica general”, ni veo lo que puede ser la didáctica de la matemática, mientras que veo muy bien lo que puede ser la didáctica de los números decimales, la de la geometría, ...»;

no es una opinión aislada.

Evitaremos comentar posturas de este tipo para no perdernos en mil riachuelos; creemos que este tipo de tendencia está ligada a una visión puramente utilitarista de la didáctica, postura muy difundida. Sin embargo, la postura descrita volverá a asomar en los párrafos siguientes. En ellos, contrapondremos la Didáctica General a la Didáctica Disciplinar porque creemos que lo que argumentamos para la Didáctica de la Matemática también puede aplicarse, en gran medida, a otras Didácticas específicas o disciplinares. Naturalmente, cuando se necesiten ejemplos, exemplificaremos en Didáctica de la Matemática.¹ Daremos a este capítulo, dado su carácter de falsa contradicción, una estructura diferente a la del resto del libro.

2. Problema de existencia o de legitimidad

El lenguaje escolar está alejado de la experiencia cotidiana, privilegia los términos y conceptos abstractos, e implica intercambios entre profesor y estudiante que se asemejan a la reproducción de fórmulas preestablecidas. Los significados se definen a menudo de manera técnica y el metalenguaje –el discurso sobre el discurso– ocupa un lugar destacado.

Howard Gardner (1993), *The Unschooled Mind: How Children Think And How Schools*. Basic Books.

La contraposición entre la Didáctica General y la Didáctica Disciplinar podría expresarse del siguiente modo:

¹ En la redacción de este capítulo hemos recurrido principalmente a Stanic (1988), McDermott (1990), Godino (1991) y D'Amore (1994).

No existe una Didáctica General. Existen solo las Didácticas *de alguna cosa*. De lo contrario, se corre el riesgo de hablar en el vacío, de nada.

[Un posible subproducto muy difundido es un sentido limitador en el cual se considera la Didáctica disciplinar: la Didáctica coincide con la ingeniería didáctica o con la didáctica “práctica” (colección de trucos empíricos) de alguna cosa específica].

vs

No existe una Didáctica específica de una disciplina; existe en su lugar una Didáctica General: las Didácticas específicas de una disciplina son segmentos de la Didáctica General. Los problemas de la Didáctica son siempre los mismos: dependiendo de la disciplina específica habrá peculiaridades, pero de segundo orden, casi irrelevantes.

¿Es posible una conciliación entre estas dos posturas antitéticas?

En primer lugar, parece existir problemas con el lenguaje, al menos con la terminología: la “Didáctica” puede entenderse como “teoría de la Didáctica” derivada de la pragmática observada y de los resultados obtenidos;

la “Didáctica” también puede entenderse en un sentido filosófico y teórico;

la “Didáctica” puede entenderse entonces como algo mucho más específico.

De hecho, sin embargo, es obvio que tenemos que aceptar la evidencia: hay problemáticas, por así decirlo, “aguas arriba”, de la Didáctica disciplinar, que no dependen de las disciplinas individuales (por ejemplo: cuestiones relativas con las relaciones, la afectividad, la identidad, ...; más técnicamente: si la práctica didáctica se lleva a cabo por grupos, por ejemplo, se necesita el conocimiento de la conducción del trabajo en grupo; si es didáctica por problemas, el conocimiento de técnicas de estimulación; si es por discusión, el conocimiento de técnicas para la conducción de discusiones; ...).

Teorizando (o generalizando) estas problemáticas, se crea una *teoría (general) de la Didáctica* que ya no depende explícita o directamente de las disciplinas. Es cierto que la teoría resultante no es la Didáctica General tal y como los estudiosos de este campo la ven y quieren que sea, pero ciertamente es una generalización de la Didáctica disciplinar y, por tanto, los estudios en este campo conciernen a todas las didácticas, generales o no.

Diremos: es evidente que existen peculiaridades de la Didáctica de la disciplina X que son intrínsecas, precisamente ligadas a la Didáctica de X (son de diversa índole: metodológicas, o de motivación, o de reconocimiento social, ...).²

Es muy probable que, en la base de estas peculiaridades, no haya motivaciones objetivas sino motivaciones que dependen de la imagen que la materia X da de sí misma [a veces esta afirmación debería interpretarse de la siguiente manera: las motivaciones/deseos dependen de la imagen de la idea de X que tienen los profesores de X y que de alguna manera intentan, más o menos conscientemente, transferir a los estudiantes: es este “modelo” el que el profesor (repetimos: a menudo inconscientemente) propone a la clase].

Pues bien, creemos que, a pesar de la especificidad, se trata de un problema de carácter general, que afecta a la Didáctica General al menos en la misma medida que a la Didáctica específica.

Entendemos entonces la Didáctica General como un amplio campo de estudio e investigación, *alimentado* por las Didácticas específicas: los problemas de estas últimas, siempre que sean generalizables, constituyen objeto de estudio e investigación dentro de la Didáctica General, aunque no se identifiquen con esta. Cualquier resultado general obtenido en la teoría de la Didáctica son utilizables en cada ámbito específico.

² La motivación/volición para estudiar puede ser diferente según la materia; el reconocimiento social es diferente para los que destacan (o flaquean) según la materia; ... ¿Y qué hay de la metodología? Es obvio y demasiado evidente que por “disciplina” hay que entender no sólo sus contenidos específicos, sino el conjunto: contenidos, método, historia, epistemología.

La relación entre Didáctica General y Didáctica Disciplinar es y debe ser por tanto fructífera, y a su vez objeto de estudio e investigación.

3. El Problema de la Epistemología

No sólo la búsqueda de cómo se forman las teorías, sino también la búsqueda de cómo se organizan los conceptos se vuelve tan interesante. En este punto, en efecto, el término *epistemología* me parece poco adecuado, porque deriva de *episteme*, es decir, *conocimiento cierto*; quizás sería más apropiado hablar de *teoría del conocimiento*. Pero ahora, como en tantos otros casos, podemos aceptar un término históricamente establecido.

Francesco Speranza (1997), *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Pitagora.

Otra contraposición podría describirse del siguiente modo:

Sólo la Didáctica disciplinar posee un estatuto epistemológico propio y significativo. La Didáctica General carece de epistemología: “toma prestados” retazos de epistemologías de cada una de las disciplinas específicas.

vs

Sólo la Didáctica General tiene un estatuto epistemológico propio y significativo. Los de las Didácticas disciplinares coinciden con la epistemología de la disciplina que constituye su objeto.

Creemos que la base de la controversia subyace a una ambigüedad del término “*Epistemología*”. En nuestra opinión, entran en juego al menos tres significados diferentes:

1. Existen Epistemologías de las propias disciplinas, creadas por la historia del progreso y el trabajo realizado por los seres humanos en las diferentes comunidades de práctica que han creado dichas disciplinas; a menudo la Epistemología de una disciplina es el resultado de un estrecho debate que ha tenido lugar a lo largo de siglos; basta pensar, por ejemplo, en el concepto de “verdad” en Matemática y cómo ha cambiado desde Platón hasta Hilbert. Sin embargo, coexisten diferentes ideas que han dado lugar a diferentes epistemologías: piénsese en el debate, de nuevo para quedarnos en la Matemática, en torno a la posición de Enriques [véase: (Enriques, 1912; Enriques y De Santillana, 1932, 1936; Speranza, 1992, 1995, 1997; Pompeo Faracovi, 1982)]. Aquí, “Epistemología de” significa “Filosofía de”; pero incluso en esta acepción (que, no obstante, amplía los significados) su sentido no es unívoco. En la hipótesis de ampliar los límites, consideremos las diferentes posiciones sobre la Filosofía de la Ciencia de Lakatos y Musgrave (1960), Kuhn (1962), Bunge (1985a, b), sólo para tener al menos cuatro posibles significados con diferentes posturas y matices. Ahora bien, es cierto que las diferencias son notables, pero son “internas” a una concepción general que, en conjunto, es bastante inequívoca.

2. Existen Epistemologías de las Didácticas Disciplinares que son *otra cosa*; en este contexto, quizás, el término que se acerca más es el piagetiano, es decir, relativo al estudio de cómo evolucionan y cómo se adquieren los conceptos. En el ámbito de la “Didáctica de alguna cosa” no se aplica directamente la Epistemología de ese algo [que puede ser (al menos en parte) el objeto de estudio], sino una Epistemología distinta porque el sujeto de investigación ya no es la disciplina ni la investigación ni el investigador, sino que son: el ser humano aprendiz o el profesor (o, mejor, ambos)

y los conocimientos propios de esa disciplina. Incluso estamos dispuestos a admitir que hay puntos epistemológicos con interpretaciones claramente distintas, a primera vista antitéticas.

Por ejemplo, mientras que la verdad de un enunciado es completamente irrelevante en una teoría de los enunciados, reduciéndose a un hecho puramente combinatorio, no ocurre lo mismo en Didáctica, dependiendo de los niveles de edad, aculturación y profundidad crítica alcanzados. Así, los enunciados que a toda la clase parecen verdaderos, deben ser considerados como tales luego de considerar la posibilidad de cuestionar su validez, contrariamente al carácter objetivo de la verdad. La didáctica disciplinar debe ofrecer puntos de apoyo para crear situaciones en las que, a mayor profundidad crítica, pueda revisarse el concepto. En resumen, un buen acuerdo alcanzado en el seno de la comunidad puede ser aceptado desde un punto de vista epistemológico dentro de la Didáctica Disciplinar, pero puede no ser suficiente dentro de la Epistemología de la disciplina tratada.

3. Hay Epistemologías de la Didáctica General que constituyen una tercera visión y que dependen de las opciones puestas en la base de la constitución de dicha Didáctica General. Si la base es heurística (recopilación y generalización de evidencias didácticas concretas), la Epistemología apriorística resultante es una cosa. Si la base es, por así decirlo, “filosófica” (teórica), la Epistemología resultante es otra. Y siguen existiendo Epistemologías diferentes. Señalamos sólo dos, antitéticas (pero la lista podría continuar): estamos pensando en las posiciones de Romberg (1988) y Shulman (1986).

Romberg recurre a la metáfora de que la construcción de una teoría recuerda a una receta para preparar alimentos; se trata de juntar ingredientes dosificados y combinados según determinadas características que se analizan minuciosamente. Una receta, probada y probada, acabará dando un resultado único y apreciable, fruto de la madurez, de la experiencia.

Mientras que muchos investigadores denuncian como negativo el hecho de que coexistan escuelas de pensamiento competitivas, al contrario Shulman considera que esto es positivo en los casos de las humanidades y las ciencias sociales y, por tanto, también en los casos de las didácticas disciplinares: se trataría de un estado maduro y natural, ya que favorece el desarrollo de diversas estrategias de investigación y el enfoque de diferentes puntos de vista sobre diferentes problemas. Con mayor razón, en nuestra opinión, esto parece aplicarse a una Epistemología de la Didáctica General.

[En D'Amore (2001a, b, 2003b) se pueden encontrar intentos de conciliar todos los puntos de vista, pero sólo en el ámbito de la Didáctica de la Matemática].

Así pues, una vez puestas de relieve estas premisas terminológicas, el desacuerdo se desvanece. Existen diferentes estatutos epistemológicos significativos, que no se pueden atribuir unos a otros, todos estos definitivamente importantes, con diferentes significados del adjetivo “*epistemológico*”: el *investigador de la disciplina X* hace su trabajo: investiga en X (a menudo sin saber que se mueve dentro de una opción epistemológica relativa a una visión de X);

el *investigador de la Didáctica de X* realiza un trabajo *diferente*: investiga los procesos de (enseñanza y) aprendizaje en los casos en que la comunicación con fines didácticos trata elementos de X; es imposible que ignore el problema epistemológico que plantea la Didáctica de X y no puede dejar de ser consciente también del problema epistemológico de X, que podría inspirarle también en sus elecciones como investigador;

el *investigador en Didáctica General* hace *otro* trabajo; no puede ignorar en absoluto los problemas epistemológicos planteados por la Didáctica General porque éstos interactúan con su propia investigación. En nuestra opinión, ni siquiera debería ignorar las epistemologías de las Didácticas disciplinarias para alimentar su investigación teórica con ejemplos específicos. En nuestra opinión, debería incluso tener al menos una idea lo más correcta posible de las Epistemologías de las disciplinas, para estar seguro de captar al menos algunas tensiones filosóficas actuales y significativas.

Se trata, pues, de tres concepciones diferentes del mismo término “Epistemología”, cada una de ellas necesaria, existente y significativa.

4. Problema de formación

El sentido común es, entre las cosas del mundo, la más equitativamente distribuida, puesto que todo el mundo cree estar tan bien dotado de él, incluso aquellos que son más difíciles de complacer con respecto a cualquier otro bien no tienden a querer más de lo que tienen.

René Descartes (1637), *Discours de la méthode*. Joannes Maire.

Una nueva contraposición podría ser la siguiente:

La didáctica general es una reserva de actitudes psicopedagógicas (banales) perfectamente sustituible por el sentido común, el entusiasmo, una sólida formación disciplinar, un poco de sensibilidad, una fuerte motivación para enseñar ...

vs

La Didáctica disciplinar coincide con la disciplina que tiene como objeto; por ejemplo, la Didáctica de la Química coincide con la Química. Por tanto, la preparación del profesor sólo está vinculada a su formación disciplinar. Si, por el contrario, se concibe el papel del profesor como “educador”, a cualquier nivel, entonces, dando por sentada la preparación disciplinar, sólo se necesita formación en Ciencias de la Educación.

Se podría parafrasear y reducir los dos argumentos anteriores respectivamente a los siguientes, que son *muy comunes*:

para enseñar bien, es necesario y suficiente tener un conocimiento profundo de la materia que se enseña;

la formación del profesorado está relacionada principalmente con los estudios de carácter profesional, es decir, la preparación en el campo de la educación.

Esto muestra, sin sorpresa, que entre las dos posiciones anteriores podría incluso disolver el “vs”, ya que podría no haber oposición en absoluto, sino más bien: coincidencia; bastaría con adoptar el modelo de *dos* cursos de estudio en serie: por una parte, sólo estudios específicos, por la otro sólo estudios psicopedagógicos.

Las frases lapidarias de Giovanni Gentile, ministro italiano de Educación (1922–1924), en este contexto y a este respecto (especialmente respecto a las Ciencias en general y a la Matemática en particular), son terribles y precisas: la «intrusión» de las Ciencias en el mundo escolástico ha «dado frutos muy perjudiciales»; la Matemática está «muerta, infructuosa, árida como una piedra». También es suya la afirmación de que la Didáctica de la Matemática coincide con la Matemática, siendo el profesor de Matemática un mero repetidor de teoremas.

Esta posición debería parecer capaz de conciliar posiciones tan diversas, ... ya que es, en nuestra opinión, la enemiga de todas.

Trataremos de mediar del siguiente modo: la preparación específica es absolutamente necesaria, pero no suficiente en absoluto. El sentido común sirve de poco; basta con reflexionar sobre el hecho de que hay profesores preparados óptimamente en el plano disciplinar y de sentido común, que tienen entre ellos comportamientos opuestos: cada uno de ellos motiva sus opciones didácticas precisamente en función del *sentido común* que posee (nadie se siente carente de él o dotado en menor grado que sus compañeros: esto es lo que escribió Descartes al respecto del sentido común).

Lo mismo se aplica a las características no cuantificables como: entusiasmo, motivación, sentimiento, voluntad de comprender los problemas de los jóvenes, ...

Lo mismo ocurre con el uso de la tecnología moderna: no hay relación entre el uso de un PC para proyectar PowerPoint y la metodología didáctica utilizada: no se descarta una clase frontal que huela

a moho rancio, pero realizada mediante diapositivas en PowerPoint en lugar de la tradicional pizarra. Todavía existe una gran confusión sobre este punto.

Una sabia forma de conciliación implica, por tanto, una sólida preparación cultural y una preparación igualmente sólida en el campo de la educación. Puesto que existe una Didáctica General, a ella se debe recurrir para la preparación profesional del docente. Puesto que existe una Didáctica Disciplinar que no sea la disciplina misma, esta debe ser una parte profesionalizante del docente.³

Hay que subrayar aquí la enorme importancia de la preparación profunda de un profesor en Didáctica disciplinar; la evaluación de las respuestas del estudiante a las peticiones del profesor está estrictamente condicionada por la competencia que el profesor tenga en este campo: en mil ocasiones de encuentros con profesores en los que exemplificamos, por ejemplo, la acción del “contrato didáctico” (típico ejemplo de resultado de investigación en Didáctica de la Matemática) en las respuestas de los estudiantes, oímos a muchos profesores reconocer que durante nuestra explicación por primera vez habían comprendido el sentido de ciertas respuestas que los estudiantes les daban, respuestas que, debido a la ignorancia de los profesores en Didáctica Disciplinar, habían sido interpretadas de forma simplista como erróneas y que, en cambio, revelaban vínculos mucho más interesantes entre lo que el profesor creía haber explicado y los modelos mentales que el estudiante se había hecho de los conceptos matemáticos que se le proponían.

Aquí se podría abrir un lugar especial de discusión sobre lo que concierne a la preparación profesional del docente; remitimos a Fandiño Pinilla (2003), donde se trata ampliamente el tema.

Para continuar con este estudio nos remitimos a Fandiño Pinilla y D’Amore (2024).

5. Varias teorías de la Didáctica de la Matemática

Exactamente como sucede en los distintos campos específicos de la Matemática, a lo largo de las décadas se han sucedido evidentemente numerosos estudios teóricos, sobre todo basados en diversos resultados de investigaciones empíricas y/o en campos de estudio y análisis específicos. Imposible enumerarlos y comentarlos todos. Nos limitamos a una lista (no cronológica, salvo la número 1) sólo para dar una idea de la multiplicidad de campos de estudio. Además del tema y/o nombre de la teoría, incluimos el nombre del investigador quien es para nosotros el exponente más significativo del estudio específico. Se ha convertido casi en una costumbre (no absoluta) dar el nombre de “teoría” a estos campos de investigación o modos de interpretar los resultados (a menudo empíricos) obtenidos, como hizo Guy Brousseau al comienzo de su aventura científica.

1. Teoría de las situaciones (Guy Brousseau (1933 – 2024)).
2. Teoría antropológica de la didáctica (Yves Chevallard).
3. Constructivismo (Ernst von Glaserfeld (1917 – 2010)).
4. Fenomenología didáctica (Hans Freudenthal (1905 – 1990)).
5. Dialéctica instrumento – objeto (Régine Douady (1935 – 2006)).
6. Modelo Van Hiele sobre enseñanza – aprendizaje de la geometría (Dina van Hiele Geldof (1912 – 1958) y Pierre van Hiele (1909 – 2010) (modelo 1957)).
7. APoS [Acciones, Procesos, Objetos (mentales), Esquemas (cognitivos)] (Edward Dubinsky (1935 – 2022)).
8. Interaccionismo didáctico (Heinrich Bauersfeld (1926 – 2022)).
9. La naturaleza del aprendizaje matemático (Tommy Dreyfus).
10. Factores emocionales en el aprendizaje de las matemáticas (Richard Skemp (1919 – 1995)).

³ Y por eso aprobamos, al menos en un plano ideal, la elección italiana de escuelas de especialización (binales, de postgrado) para la formación de profesores de la escuela secundaria (cuya fundación legislativa data de septiembre de 1996) y la elección de carreras especializadas para la formación de profesores de enseñanza preescolar y primaria (ídem). Que sea una universidad o un centro de investigación, los que prepare a los futuros profesores en didáctica, entendida a su vez como disciplina científica sobre la que se investiga, es muy significativo. Que, en el caso de las escuelas de secundaria, esto tenga lugar después de la graduación, es decir, dando por sentada una sólida preparación en la disciplina y confiando, por tanto, a la escuela de especialización la única tarea de la preparación profesional en didáctica, es también un hecho muy significativo.

11. Teoría de los conceptos figurales (Efraim Fischbein (1920 – 1998)).
12. Tres mundos de la matemática: conceptual, operacional, axiomático (David Tall).
13. Teoría de los campos conceptuales (Gérard Vergnaud (1933 – 2021)).
14. Campos conceptuales, campos de experiencia, campos semánticos (Paolo Boero).
15. Enfoque instrumental de la educación matemática (Pierre Rabardel (1945 – 2021)).
16. Commognición (comunicación – cognición) (Anna Sfard).
17. Enfoque socio–epistemológico – Matemática Educativa (Ricardo Cantoral (1958 – 2021)).
18. Teoría de los registros semióticos (dimensión semio-cognitiva) (Raymond Duval).
19. Enfoque ontosemiótico EOS (Juan Godino).
20. Haz semiótico (Ferdinando Arzarello).
21. Mediación semiótica (Mariolina Bartolini Bussi y Maria Alessandra Mariotti).
22. Teoría de la objetivación (Luis Radford).

Se realizó en el NRD de Bolonia recientemente un análisis detallado, pero extremadamente conciso, de cada una de estas teorías (Asenova y otros, 2023).

Naturalmente, ya existen muchos estudios teóricos y también investigaciones empíricas destinadas a resaltar las similitudes y diferencias entre estas teorías, por ejemplo, en función con los fines para los cuales nacieron. Algunos análisis pretenden captar las diferencias entre estas teorías, otros quieren compararlas de manera positiva y constructiva, basándose en los resultados más significativos obtenidos.

Dos estudios analíticos generales que consideramos particularmente significativos desde este punto de vista son los de Bikner–Ahsbahs y otros (2008) y de Bikner–Ahsbahs, Dreyfus, Kidron y otros (2010).

Bibliografía

- Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Fúneme Mateus, C. C., Iori, M., & Santi, G. (2023). *Teorie rilevanti in didattica della matematica*, Bologna: Bonomo. [En idioma español: 2024, Bogotá: Magisterio].
- Bikner–Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Editors), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 145–175. Belo Horizonte, Brasil: PME.
- Bikner–Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Editors), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 145–175. Belo Horizonte, Brasil: PME.
- Brun, J., & Conne F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*. 3, 261–286.
- Bunge, M. (1985a). *Epistemología*. Barcelona: Ariel.
- Bunge, M. (1985b). *Pseudociencia e ideología*. Madrid: Alianza.
- Cornu, L., & Vergnioux, A. (1992). *La didactique en questions*. Paris: Hachette.
- D'Amore, B. (1994). “Didattica” e “Didattica della...”: convergenza di interessi. Il caso specifico della Didattica della matematica. *La didattica*, 2, 28–34.
- D'Amore, B. (2001a). *Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2001b). *Scritti di Epistemologia matematica. 1980–2001*. Bologna: Pitagora. [Nueva edición: 2023, Bologna: Bonomo]. [Ed. española: Bogotá: Magisterio].
- D'Amore, B. (2001c). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 15(2), 150–173.
- D'Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, 23(1), 47–51.

- D'Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Prefacio de Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [En idioma español (2005): México D.F., México: Reverté, prefacio a la edición española de Ricardo Cantoral. En idioma português (2005): São Paolo, Brasile: Escrituras, prefacio a la edición portuguesa de Ubiratan D'Ambrosio].
- D'Amore, B. (2023a). Some specific historical elements on the evolution of 'Mathematics Education' as a research discipline. *Annales Accademia delle Scienze di Bologna*, vol. 1 (2023), DOI: 10.30682/annalesps2301c
<https://annalesaccademia.it/sito/category/class-of-physical-sciences/volume-1-2023-ps/>
[Versión española: D'Amore, B. (2023). Algunos elementos históricos específicos sobre la evolución de la educación matemática como disciplina de investigación. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. 2024 Mar 19. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.2571>]
- D'Amore, B. (2023b). *Cenni di storia della Didattica della Matematica come disciplina scientifica*. Bologna: Bonomo. Prologo di Giorgio Bolondi. [Versión en idioma español: Bogotá: Magisterio. 2024].
- Enriques, F. (1912). *Scienza e razionalismo*. Bologna: Zanichelli.
- Enriques, F., & De Santillana G. (1932). *Storia del pensiero scientifico*. Bologna: Zanichelli.
- Enriques, F., & De Santillana G. (1936). *Compendio di storia del pensiero scientifico*. Bologna: Zanichelli.
- Fandiño Pinilla, M.I. (Ed.) (2003). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla, M.I., & D'Amore, B. (2024). *Por una teoría de las didácticas disciplinares*. Bogotá: Magisterio.
- Godino, J.D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En: Gutierrez A. (Ed.) (1991). *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.
- Kuhn, T.S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: The Univ. of Chicago Press.
- Lakatos, I., & Musgrave, A. (Eds.) (1960). *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. [Trad. it.: Milano, Feltrinelli, 1976].
- McDermott, L. (1990). A perspective on teacher preparation in physics and other sciences: The need for special science courses for teachers. *American journal of physics*, 58(8), 734–741.
- Pompeo Faracovi, O. (Ed.) (1982). *Federigo Enriques, approssimazione e verità*. Livorno: Belforte.
- Romberg, T. A. (1988). Necessary Ingredients for a Theory of Mathematics Education. En: H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2nd TME Conference, Bielefeld. Pp. 97–112.
- Shulman, L.S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. En: Wittrock M.C. (Ed.) (1986). *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan.
- Speranza, F. (1992). Il progetto culturale di Federigo Enriques. En: D'Amore B., Pellegrino C. (Eds.) (1992). *Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza*. Actas del Congreso homónimo, Bologna 3 10 1992. Bologna. 1–16.
- Speranza, F. (1995). Dalla storia dell'epistemologia indicazioni per leggere la storia della scienza. En: D'Amore B., & Speranza F. (Eds.) (1995). *Lo sviluppo storico della matematica. Spunti didattici*. Milano: Angeli. 148–158.
- Speranza, F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.
- Stanic, G.M.A. (1988). A response to Professor Steiner's "Theory of Mathematics Education". En: H. G. Steiner & A. Vermandel A (Eds.), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2nd TME Conference, Bielefeld.